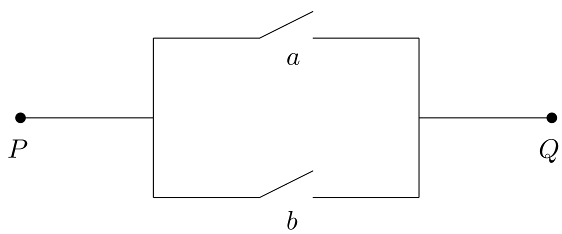
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.09)

Primer parcial — Primer cuatrimestre – 2018

Duración: 4 horas. — 26/V/18 – 9:00 hs.

---

1. Una sección de un circuito eléctrico consta de dos interruptores a y b conectados en paralelo como se muestra en la figura.



La probabilidad de que a esté cerrado y b esté abierto es 0.4, la de que a esté abierto y b esté cerrado es 0.1, y la de que pase corriente de P a Q es 0.7. ¿Los eventos “el interruptor a está abierto” y “el interruptor b está abierto” son independientes?

R. [*Referencia*: **Ejercicio 1.2** y **Ejercicio 1.28**] Designamos mediante A y B a los eventos “el interruptor a está abierto” y “el interruptor b está abierto”, respectivamente. Sabemos que $\mathbf{P}(A^c \cap B) = 0.4$, $\mathbf{P}(A \cap B^c) = 0.1$, $\mathbf{P}(A^c \cup B^c) = 0.7$. Queremos saber si la identidad $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ es verdadera o es falsa. Para ello tenemos que calcular las probabilidades $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$ y $\mathbf{P}(A \cap B)$.

Utilizando la *identidad de De Morgan* $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$ obtenemos que

$$\mathbf{P}(A \cap B) = 1 - \mathbf{P}(A^c \cup B^c) = 1 - 0.7 = 0.3$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap B^c) = 0.3 + 0.1 = 0.4, \\ \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A^c \cap B) = 0.3 + 0.4 = 0.7. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = (0.4)\cdot(0.7) = 0.28 \neq 0.3 = \mathbf{P}(A \cap B)$, concluimos que los eventos “el interruptor a está abierto” y “el interruptor b está abierto” no son independientes. $\square$

---

2. Clío planificó visitar dos museos, el de Historia y el de Arte Moderno, dedicando no más de 5 horas entre ambas visitas. La distribución conjunta de los tiempos de visita a cada museo es uniforme sobre la región triangular correspondiente a dicho plan. Sabiendo que Clío estuvo más de 3 horas visitando ambos museos, calcular la probabilidad de que haya estado en el museo de Historia más del doble de tiempo del que estuvo en el de Arte Moderno.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 2.22** y **Ejercicio 2.26**] Sean X e Y los tiempos (en horas) que Clío dedicará a visitar el museo de Historia y el museo de Arte Moderno, respectivamente. Queremos calcular $p := \mathbf{P}(X > 2Y | X + Y > 3)$.

La región triangular correspondiente al plan de Clío es

$$\triangle := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 5\right\}$$

cuyos vértices son $(0, 0)$, $(5, 0)$ y $(0, 5)$, y la distribución del vector (X, Y) es uniforme sobre $\triangle$. Como el área del triángulo $\triangle$ es $25/2$ y el vector (X, Y) se distribuye uniformemente sobre $\triangle$, tenemos que

$$\mathbf{P}((X, Y) \in \Lambda) = \frac{\text{área}(\Lambda)}{25/2}, \qquad \Lambda \subset \triangle.$$

De allí que

$$p = \frac{\mathbf{P}(X > 2Y, X + Y > 3)}{\mathbf{P}(X + Y > 3)} = \frac{\mathbf{P}((X,Y) \in \Lambda_2)}{\mathbf{P}((X,Y) \in \Lambda_1)} = \frac{\text{área}(\Lambda_2)}{\text{área}(\Lambda_1)},$$

donde Λ_1 es el trapecio de vértices $(3,0)$, $(5,0)$, $(0,5)$, $(0,3)$, y Λ_2 es el trapecio de vértices $(3,0)$, $(5,0)$, $(10/3, 5/3)$, $(2,1)$. Como el área del trapecio es la semi-suma de las bases por la altura, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\text{área}(\Lambda_1) &= \frac{\|(5,0)-(0,5)\|_2 + \|(3,0)-(0,3)\|_2}{2} \cdot \|(5/2,5/2) - (3/2,3/2)\|_2 = 8, \\
\text{área}(\Lambda_2) &= \frac{\|(5,0)-(10/3,5/3)\|_2 + \|(3,0)-(2,1)\|_2}{2} \cdot \|(5/2,5/2) - (3/2,3/2)\|_2 = 8/3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $p = 1/3$. □

---

3. Lucas y Monk juegan a cara o ceca con una moneda que tiene probabilidad $3/4$ de salir cara. La moneda se tira 3 veces: cada vez que sale cara Lucas recibe un peso, cada vez que sale ceca Monk recibe 3 pesos. Calcular la esperanza de la cantidad de pesos recibidos entre ambos.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 3.5**] Sea N la cantidad de veces que la moneda sale cara, y sean L y M la cantidad de pesos obtenidos por Lucas y Monk al terminar el juego, respectivamente. Queremos calcular $\mathbf{E}[L+M]$.

Por definición, $L = N$ y $M = 3(3-N) = 9-3N$, y de allí se obtiene $L + M = 9 - 2N$. En consecuencia, $\mathbf{E}[L+N] = 9 - 2\mathbf{E}[N]$. Ahora bien, como N es una variable aleatoria con distribución Binomial $\mathcal{B}(3, 3/4)$ se sabe que $\mathbf{E}[N] = 3(3/4) = 9/4$. Por lo tanto, $\mathbf{E}[L+M] = 9/2$. □

---

4. Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = 3e^{-(2x+y)}\mathbf{1}\{0 < x < y\}.$$

Hallar la densidad conjunta de $(U,V) = (X, 2X+Y)$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 4.10**] En primer lugar, observamos que $(U,V) = g(X,Y)$, donde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal definida por $g(x,y) = (A(x,y)^t)^t$, donde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es la matriz inversible, con determinante igual a 1,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En segundo lugar, observamos que el soporte de la distribución de (X,Y),

$$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x,y) > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$$

puede representarse de la siguiente manera

$$\Gamma = \{a(1,1) + b(0,1) : a > 0, b > 0\}.$$

Como el soporte de la distribución de (U,V) es $\Lambda = g(\Gamma) = \{g(x,y) : (x,y) \in \Gamma\}$ y g es una transformación lineal obtenemos

$$\Lambda = \{ag(1,1) + bg(0,1) : a > 0, b > 0\} = \{a(1,3) + b(0,1) : a > 0, b > 0\} = \{(u,v) : 0 < u < v/3\}.$$

Finalmente, usando la fórmula de cambio de variables obtenemos

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(g^{-1}(u,v))|J_{g^{-1}}(u,v)| = 3e^{-v}\mathbf{1}\{0 < u < v/3\}.$$

□

---

5. Alkaios tiene dos alternativas de viaje a la FIUBA, en subte o en colectivo, y las utiliza en las proporciones 0.6 y 0.4, respectivamente. El tiempo de viaje (en min) en subte es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(45, 60)$. El tiempo de viaje (en min) en colectivo es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(50, 70)$. El viernes Alkaios tardó exactamente 55 minutos en llegar a la FIUBA, calcular la probabilidad de que haya viajado en colectivo.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 5.9**] El tiempo T (en min) que tarda Alkaios en llegar a la FIUBA depende del medio de transporte M que utiliza: $M = s$ indica que utiliza el subte, y $M = c$ que utiliza el colectivo. Sabemos que $T|M = \ell \sim T_\ell$, $\ell \in \{s, c\}$, donde $T_s \sim \mathcal{U}(45, 60)$ y $T_c \sim \mathcal{U}(50, 70)$. También sabemos que $\mathbf{P}(M = s) = 0.6$ y que $\mathbf{P}(M = c) = 0.4$. Queremos calcular $\mathbf{P}(M = c|T = 55)$.

Utilizando *la regla de Bayes* obtenemos

$$\mathbf{P}(M = c|T = 55) = \frac{\mathbf{P}(M = c) f_{T_c}(55)}{f_T(55)} = \frac{(0.4) \cdot (1/20)}{(0.4) \cdot (1/20) + (0.6) \cdot (1/15)} = \frac{1}{3}.$$

□

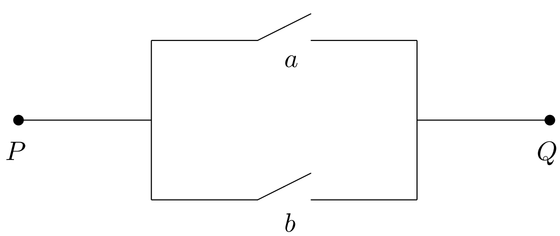
PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.09 - 81.04)

Primer parcial — Primer cuatrimestre – 2018

Duración: 4 horas. — 26/V/18 – 9:00 hs.

---

1. Una sección de un circuito eléctrico consta de dos interruptores a y b conectados como se muestra en la figura.



La probabilidad de que a esté cerrado y b esté abierto es 0.4, la de que a esté abierto y b esté cerrado es 0.1, y la de que pase corriente de P a Q es 0.7. ¿Los eventos "el interruptor a está abierto" y "el interruptor b está abierto" son independientes?

R. [*Referencia*: **Ejercicio 1.2** y **Ejercicio 1.28**] Designamos mediante A y B a los eventos "el interruptor a está abierto" y "el interruptor b está abierto", respectivamente. Sabemos que $\mathbf{P}(A^c \cap B) = 0.4$, $\mathbf{P}(A \cap B^c) = 0.1$, $\mathbf{P}(A^c \cup B^c) = 0.7$. Queremos saber si la identidad $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ es verdadera o es falsa. Para ello tenemos que calcular las probabilidades $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$ y $\mathbf{P}(A \cap B)$.

Utilizando la *identidad de De Morgan* $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$ obtenemos que

$$\mathbf{P}(A \cap B) = 1 - \mathbf{P}(A^c \cup B^c) = 1 - 0.7 = 0.3$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap B^c) = 0.3 + 0.1 = 0.4,\\ \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A^c \cap B) = 0.3 + 0.4 = 0.7.\end{aligned}$$

Como $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = (0.4)\cdot(0.7) = 0.28 \neq 0.3 = \mathbf{P}(A \cap B)$, concluimos que los eventos "el interruptor a está abierto" y "el interruptor b está abierto" no son independientes. □

---

2. Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = 3e^{-(2x+y)}\mathbf{1}\{0 < x < y\}.$$

Hallar la densidad conjunta de $(U,V) = (X, 2X+Y)$.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 4.10**] En primer lugar, observamos que $(U,V) = g(X,Y)$, donde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal definida por $g(x,y) = (A(x,y)^t)^t$, donde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es la matriz inversible, con determinante igual a 1,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En segundo lugar, observamos que el soporte de la distribución de (X,Y),

$$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x,y) > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$$

puede representarse de la siguiente manera

$$\Gamma = \{a(1,1) + b(0,1) : a > 0, b > 0\}.$$

Como el soporte de la distribución de (U, V) es $\Lambda = g(\Gamma) = \{g(x,y) : (x,y) \in \Gamma\}$ y g es una transformación lineal obtenemos

$$\Lambda = \{ag(1,1) + bg(0,1) : a > 0, b > 0\} = \{a(1,3) + b(0,1) : a > 0, b > 0\} = \{(u,v) : 0 < u < v/3\}.$$

Finalmente, usando la fórmula de cambio de variables obtenemos

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(g^{-1}(u,v))|J_{g^{-1}}(u,v)| = 3e^{-v}\mathbf{1}\{0 < u < v/3\}.$$

$\square$

---

3. Alkaios tiene dos alternativas de viaje a la FIUBA, en subte o en colectivo, y las utiliza en las proporciones 0.6 y 0.4, respectivamente. El tiempo de viaje (en min) en subte es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(45, 60)$. El tiempo de viaje (en min) en colectivo es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(50, 70)$. El viernes Alkaios tardó exactamente 55 minutos en llegar a la FIUBA, calcular la probabilidad de que haya viajado en colectivo.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 5.9**] El tiempo T (en min) que tarda Alkaios en llegar a la FIUBA depende del medio de transporte M que utiliza: $M = s$ indica que utiliza el subte, y $M = c$ que utiliza el colectivo. Sabemos que $T|M = \ell \sim T_\ell$, $\ell \in \{s, c\}$, donde $T_s \sim \mathcal{U}(45, 60)$ y $T_c \sim \mathcal{U}(50, 70)$. También sabemos que $\mathbf{P}(M = s) = 0.6$ y que $\mathbf{P}(M = c) = 0.4$. Queremos calcular $\mathbf{P}(M = c|T = 55)$.

Utilizando *la regla de Bayes* obtenemos

$$\mathbf{P}(M = c|T = 55) = \frac{\mathbf{P}(M = c)f_{T_c}(55)}{f_T(55)} = \frac{(0.4)\cdot(1/20)}{(0.4)\cdot(1/20) + (0.6)\cdot(1/15)} = \frac{1}{3}.$$

$\square$

---

4. Clientes arriban a un kiosco para cargar su tarjeta SUBE de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 10 por hora. Los montos cargados por cada cliente son independientes entre sí e independientes de los momentos en que realizan las cargas. La distribución del monto (en \$) cargado por cada cliente es 50, 100, 150 con probabilidades 0.5, 0.3, 0.2, respectivamente. Calcular la varianza del monto total cargado por todos los clientes que arribaron al kiosko entre las 8:00 y las 13:00.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 7.15** y **Ejercicio 7.16**] El monto total cargado por todos los clientes que arribaron al kiosko entre las 8:00 y las 13:00, S, depende de la cantidad de clientes que arribaron al kiosko entre las 8:00 y las 13:00 y del monto en \$ cargado por cada cliente. Si denotamos mediante N a la cantidad de clientes que arribaron al kiosko entre las 8:00 y las 13:00 y mediante M_k al monto cargado por el k-ésimo cliente, tenemos

$$S = \sum_{k=1}^{N} M_k$$

Como $N, M_1, M_2, \dots$ son independientes y $M_1, M_2, \dots$ son idénticamente distribuidas tenemos que $\mathbf{E}[S|N] = \mathbf{E}[M_1]\cdot N$ y $\mathbf{var}(S|N) = \mathbf{var}(M_1)\cdot N$. De acuerdo con el *Teorema de Pitágoras* tenemos que

$$\mathbf{var}(S) = \mathbf{var}(\mathbf{E}[S|N]) + \mathbf{E}[\mathbf{var}(S|N)] = \mathbf{E}[M_1]^2\mathbf{var}(N) + \mathbf{var}(M_1)\mathbf{E}[N].$$

Debido a que los clientes arriban al kiosko a cargar su tarjeta SUBE de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 10 por hora, N tiene la distribución de Poisson de media 50, y como $\mathbf{E}[N] = \mathbf{var}(N) = 50$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{var}(S) &= 50(\mathbf{E}[M_1]^2 + \mathbf{var}(M_1)) = 50\mathbf{E}[M_1^2]\\ &= 50(0.5\cdot 50^2 + 0.3\cdot 100^2 + 0.2\cdot 150^2)\\ &= 437500.\end{aligned}$$

□

---

5. Seth compra 75 bolsas de arena. Los pesos (en kg) de dichas bolsas son variables aleatorias independientes de media 19.5 y desvío estándar 0.3. En el traslado al punto de entrega, cada bolsa perderá un peso (en kg) distribuido uniformemente sobre el intervalo $[0, 0.5]$. Calcular aproximadamente la probabilidad de que Seth reciba menos de 1450 kg de arena en el punto de entrega.

R. [*Referencia*: **Ejercicio 8.21**] Sea X_i el peso de la i-ésima bolsa de arena en el punto de carga, y sea Y_i el peso perdido por dicha bolsa durante el traslado al punto de entrega, $i = 1, \dots, 75$. El peso de la i-ésima bolsa que recibe Seth en el punto de entrega es $W_i = X_i - Y_i$. Queremos calcular aproximadamente la probabilidad

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{75} W_i < 1450\right).$$

Como $\mathbf{E}[X_i] = 19.5$, $\mathbf{var}(X_i) = 0.09$, $\mathbf{E}[Y_i] = 0.25$, y $\mathbf{var}(Y_i) = 0.25/12$, resulta que

$$\mathbf{E}[W_i] = 19.5 - 0.25 = 19.25, \qquad \mathbf{var}(W_i) = 0.09 + 0.25/12 = 1.33/12$$

Aplicando el *Teorema central del límite* queda

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{75} W_i - 75 \cdot (19.25)}{\sqrt{75 \cdot (1.33/12)}} < z\right) \approx \Phi(z).$$

Poniendo $z = \frac{1450 - 75 \cdot (19.25)}{\sqrt{75 \cdot (1.33/12)}}$, y simplificando términos dentro de la probabilidad que aparece en el lado izquierdo de la aproximación anterior, resulta que

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{75} W_i < 1450\right) \approx \Phi\left(\frac{1450 - 75 \cdot (19.25)}{\sqrt{75 \cdot (1.33/12)}}\right) = \Phi\left(2.16\right) \approx 0.98.$$

□